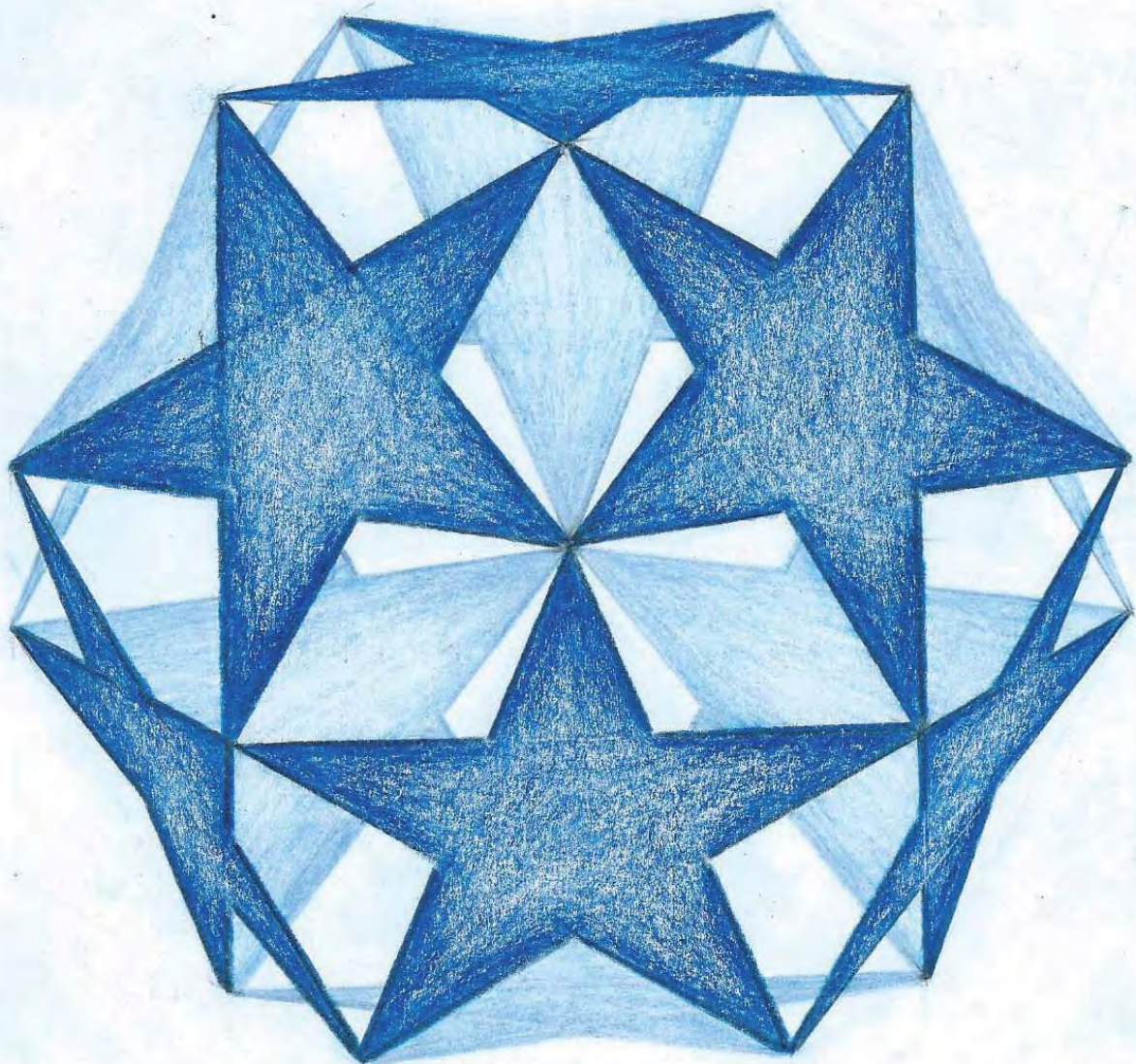


Platonische lichamen

wiskundeperiode 8e klas



TEKST EVELIEN NIJEBOER

Het is stil in de 8e klas van het hoofdstedelijke Geert Groote College. Vol toewijding zitten de leerlingen tekeningen te maken van regelmatige veelvlakken in perspectief. 'Ook het bespreken van elkaars werk gebeurt in een sfeer van onderling respect', aldus periodeleerkracht Dominique Borowski. Gemakkelijk is deze stof niet, want er is geen 'voorbeeld'. Er komt ook nauwelijks algebra of zelfs rekenwerk aan te pas, ook niet op het VWO. Is dit wel wiskunde?

Zelfstandig denken

Joris Boermans, wis- en scheikundeleraar aan het GGCA: 'In ons wiskundeonderwijs zit een meetkundelijn die veel sterker uitgewerkt is dan in het reguliere onderwijs, met name in de periodes. In de gangbare leerlijnen wordt met euclidische meetkunde gewerkt: het driedimensionale assenstelsel. Je leert meteen om vanuit de algebra een lijn te tekenen binnen zo'n assenstelsel. Algebra en assenstelsel worden direct aan elkaar gekoppeld en veel verder gaat het vaak ook niet - alleen de formules worden complexer. Dit soort wiskunde gebruik je in technische toepassingen. Dat is nuttig en handig, maar wiskunde heeft ook een ontwikkelings- of opvoedingsaspect. Door zelf wiskundige vormen te construeren kunnen leerlingen een zelfstandige vorm van denken ontwikkelen.'

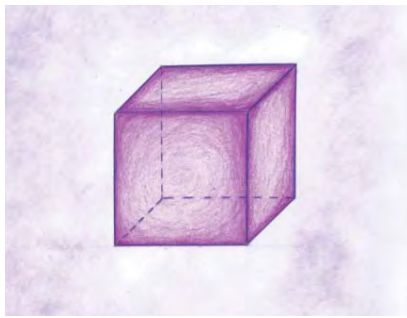
Platonische lichamen

Tijdens de periode 'platonische lichamen' krijgen de leerlingen geschreven instructies, waarmee ze stap voor stap een platonsch lichaam moeten construeren - van een eenvoudige kubus tot ingewikkelde vormen als de pentagon-dodecaëder (zie kader). Joris: 'Voor de kinderen is het echt lastig om dat voor elkaar te krijgen. Ze moeten uit het niets zichtbaar maken hoe je die vorm 'in het echt' ziet. Vanuit het punt waar ze zelf staan, moeten ze beoordelen welke vlakken of delen van vlakken je dan ziet, hoe en waar het ene het andere vlak afdekt. Je moet er echt mee bezig, je moet innerlijk in beweging komen om dat goed te kunnen doen. Dat is ook het doel van die lessen: leerlingen maken zich zo een innerlijk en ruimtelijk denken eigen. Naast het abstracte denken in begrippen staat het zelfstandig voortbrengen van beelden of voorstellingen. Dat is een activiteit, er is een wil voor nodig om dat voor elkaar te krijgen. We brengen het abstracte denken - dat heel exact is maar ook inhoudsloos - naar het beelddenken toe. Volgens Rudolf Steiner is het vermogen om je eigen beelden te creëren een voorwaarde om vrij en zelfstandig te kunnen denken. Wil je goed abstract kunnen denken, dan moet je ook in dat beelddenken kunnen komen.'

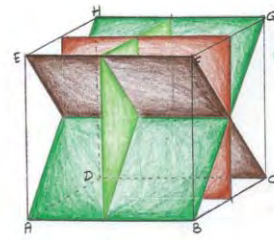
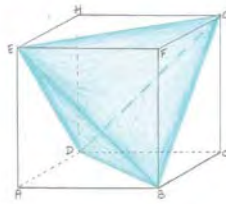
'Indien het vermogen om recht van onrecht te onderscheiden uiteindelijk iets te maken zou hebben met het denkvermogen, dan moeten we het gebruik van dat vermogen van ieder geestelijk gezond persoon durven 'eisen', hoe erudiet of onwetend, intelligent of dom hij verder ook mag zijn.' | Hannah Arendt

Filosofie

In dit verband is het interessant om de wortels van onze cultuur te bekijken. De Griekse filosofie bevindt zich op de grens tussen beeld- en abstract denken, en Plato was een echte beelddenker. Op zijn school diende de wiskunde als vooropleiding voor toekomstige filosofen. Door wiskunde leerde je nadenken over dingen die zuiver objectief zijn maar ook woordeloos en immaterieel. Een voorbeeld: er zijn objectief gezien op de hele wereld maar vijf soorten platonische lichamen (zes als je de bol meerekent, zie kader) - niet meer en niet minder, hoe je ook zoekt. Plato verbond ze met verschillende sferen of niveaus binnen de toenmalige kosmologie (aarde, water, lucht, vuur en 'ether' of hemelmaterie, zie kader). Het analyseren van de meetkundige verbanden tussen de lichamen was aanleiding om - in beelden - na te denken over relaties tussen deze sferen. Een voorbeeld: met een relatief eenvoudige bewerking kunnen de platonische lichamen in elkaar overgaan (maak van de punten een vlak, loodrecht op de straal van het lichaam). Je keert zo'n vorm dan als het ware binnenstebuiten. Een kubus verandert dan in een oktaëder (een achthoek van driehoeken). Een icosaeëder (twintigvlak van driehoeken) verandert in een pentagon-dodecaëder (een twaalfvlak van vijf-



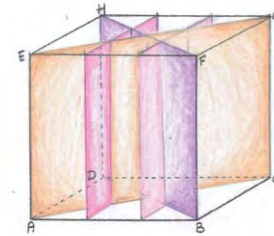
Een Tetraëder (Van twee punten)



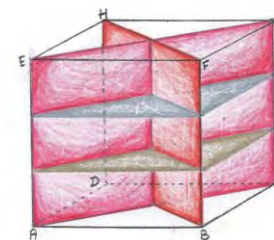
oefening 4



II Kuboctaëder



oefening 5



oefening 6

Uit het periodeschrift van Yosha Schweitz - 8e klas

hoeken). Het tetraëder (viervlak van driehoeken) echter verander in wéér een tetraëder, als je van de punten vlakken maakt. Dat laat iets zien over de eigenschappen van het element 'vuur', ofwel geest: het kan zichzelf voortbrengen door spiegeling. En als je die twee tetraëders tegelijkertijd bekijkt (de tetraëderster, zie tekening), dan vormen zij samen de punten van een kubus. Zo zijn er meer wiskundige thema's die door verschillende Griekse filosofen gevonden werden. Ze werden als beeld gezien van wetmatigheden binnen de schepping. Het denken van de Grieken was anders dan dat van ons: ook objectief maar beeldend, scheppend en gericht op zingeving.

Inzicht en scheppen

Plato had eigenzinnige opvattingen over wat 'kennis' of 'inzicht' überhaupt is. Voor hem bestond kennis uit 'herinnering'. Het ophalen van een herinnering zag hij als het scheppen of formuleren van een nieuw inzicht. Boeken zag hij niet als kennis, integendeel. Hij dacht dat de mensen, als zij zich zouden verlaten op het schrift, hun vermogen tot het scheppen van beelden uit hun herinnering zouden verliezen en daarmee ook hun eigenlijke wijsheid. 'Zij zullen de indruk wekken véél te weten, maar feitelijk zullen zij veelal zonder inzicht zijn en daarbij lastig in de omgang'. Toch heeft het abstracte denken ons veel gebracht – zonder abstract denken hadden we nog geen fractie van onze huidige techniek tot stand kunnen brengen.

Vanuit het oogpunt van hedendaagse techniek is het zelfstandig vormen van inzicht helemaal niet nodig. Integendeel, een leerling die complexe formules uitrekent lijkt veel intelligenter dan een leerling die een octaëder zit te tekenen. Maar waar komen we uit als dat vermogen tot het vormen van inzicht verdwijnt? En hoe gaan we dan de problemen oplossen die door huidige stand van techniek zijn ontstaan? Ook in het vrijeschoolonderwijs zie je dit dilemma terug.

Kennis of ontwikkeling

Joris: 'Er is een groot verschil tussen een opvoedings- of ontwikkelingsstandpunt innemen, of het werken naar een examennorm toe. Als het goed is, overlappen die doelstellingen elkaar natuurlijk, maar in veel reguliere leerlijnen zie je een abstract, rechtlijnig denken terug waarin ontwikkeling gezien wordt als een lineair stapelproces. De vrijeschoolpedagogie heeft een fundamenteel ander uitgangspunt.' Het periodeonderwijs bestaat uit een onderwerp dat drie weken lang elke dag terug komt. Joris: 'Elke dag opnieuw wordt de stof opgepakt, geoefend en weer vergeten. Dat vergeten is heel belangrijk! Dan kunnen de nachten ook meedoen.' In de les vormt een leerling zich dan een nieuw begrip, dat zich baseert op de ervaring van de vorige dag. Joris: 'Dan kom ik weer op Plato, die zei dat kennis bestaat uit herinnering. Je kan je pas herinneren als je eerst vergeet.' De wiskundig-

'Volgens Steiner is het vermogen om je eigen beelden te creëren een voorwaarde om vrij en zelfstandig te kunnen denken'

technische kennis en vaardigheden die bij de examens getoetst worden, ontwikkelen vrijeschoolleerlingen uiteraard ook. Maar er is zoveel méér. Joris: 'Er zijn maar een paar leerlingen die wiskunde zullen gaan studeren, maar iedereen moet leren denken. Daarom doen alle leerlingen deze wiskundeperiode.'

Standpunten

De platonische lichamen komen later terug in periodes waarin leerlingen leren vormen te laten roteren om een as, ofwel: vormen van verschillende kanten te bekijken. Het lichaam zelf verandert niet, maar het aanzien ervan op het platte vlak wel. Leerlingen oefenen zo om een onderwerp in objectieve zin van verschillende standpunten te bekijken. In de elfdeklasperiode 'projectieve meetkunde' komt daar het denken in polariteiten ofwel tegenstellingen bij. Op het GGCA geeft Dickens van der Werff deze periode. 'Daarin leer je hoe tegenstellingen onlosmakelijk bij elkaar horen; en hoe je daar tussenin heel exact een standpunt bepaalt.' Hij laat leerlingen inversies tekenen: een punt wordt lijn en andersom. Ook laat hij leerlingen tekenen hoe platonische lichamen in elkaar overgaan, als je van de punten vlakken maakt en andersom. 'Uiteindelijk behandel ik dan de onzekerheidsrelatie van Heisenberg, ofwel het golfdeeltje-dilemma – een fundamenteel probleem in de deeltjesfysica.'

Elementaire deeltjes

De platonische lichamen zijn eigenlijk als elementaire deeltjes: ze komen in overal in terug. Joris: 'Bijvoorbeeld in de tiende klas, bij kristallogie. Een zoutkristal (van keukenzout) heeft een kubusvorm, maar de kubusvorm is ook op moleculair niveau al zichtbaar. Koolstofatomen bestaan uit gestapelde tetraëders. Als je daarin twee punten omdraait, verandert die stof (bijvoorbeeld een melk- of aminozuur) van links- in rechtsdraaiend, of andersom. Qua chemische structuur is de stof dan hetzelfde, maar in z'n ruimtelijke structuur en z'n werking niet. Een levend organisme heeft alleen linksdraaiende aminozuren; die kunnen pas rechtsdraaiend worden als het organisme sterft.'

Ook in de periode architectuur komen de platonische lichamen terug. Joris: 'Al in het oude Egypte zie je ze verschijnen: een piramide is een octaëder die voor de helft boven de grond staat.' Tijdens de Middeleeuwen ging de geometrische bouwkennis ondergronds in de Gilden en verwaterde na de Barok. In de Arabische architectuur kwam de geometrie toen tot grote bloei. Daar zie je de meest geavanceerde vormen en getalreeksen terug, vaak gebaseerd op de 'Gulden Snede'. In de 20e eeuw zie je dit soort kennis weer opduiken bij Brancusi, Frank Lloyd Wright en in Nederland bij Berlage.

Niet alle twaalfdeklasperiodes kunnen tegenwoordig nog gegeven worden omdat de focus dan moet liggen op het halen van examens. Joris: 'Maar we blijven zoeken naar het ideale evenwicht tussen kennis en ontwikkeling.' ●

Wat zijn platonische lichamen?

Plato ontdekte dat er slechts slechts vijf geometrische lichamen zijn die aan de volgende voorwaarden voldoen: opgebouwd uit een en dezelfde regelmatige veelhoek, waarbij op ieder punt dezelfde hoeveelheid vlakken bij elkaar komt en waarvan alle punten even ver verwijderd zijn van het middelpunt. De bol (volgens Plato beeld van 'het nog niet zijnde') kan worden meegeteld als nummer nul, of een oneindig veelvlak. Verder komen alleen drie-, vier- en vijfhoeken in aanmerking. Vanaf drie verbonden punten is er überhaupt pas sprake van een vlak - en als je zes hoeken aan elkaar legt krijg je een plat vlak.

De meest 'volmaakte' lichaam is volgens Plato de pentagon-dodecaëder (een twaalfvlak van vijfhoeken). Hierin vind je alle andere lichamen terug en ook de Gulden Snede. De anderen heten tetraëder (een viervlak van driehoeken), hexaëder (kubus), octaëder (achtvlak van driehoeken) en icosaeëder (twintigvlak van driehoeken).

Plato verbond de platonische lichamen met de vier elementen (water, aarde, lucht en vuur), dat zijn kwaliteiten die weer verbonden zijn met de vier natuurrijken. Het mediteren op de platonische lichamen en hun onderlinge meetkundige relaties (zoals bijvoorbeeld in de school van Pythagoras) was van oudsher een manier om bezig te zijn met de wetmatigheden van de schepping.

- **Tetraëder** (viervlak van driehoeken): vuur, mensenwereld, inzicht, geest
- **Octaëder** (achtvlak van driehoeken): lucht, dierenwereld, ziel, gewaarwording
- **Hexaëder** (kubus): aarde, minerale stof
- **Icosaëder** (twintigvlak van driehoeken): water, plantenwereld, vegetatief leven
- **Pentagon-dodecaëder** (een twaalfvlak van vijfhoeken): alomvattend, volmaakt

